

Progetto di ricerca e piano delle attività

per un assegno di ricerca sul tema

“Aspetti combinatorici della teoria delle rappresentazioni e della topologia algebrica”

**nell’ambito del progetto PRIN2022_MOCI dal titolo ALgebraic and TOPological combinatorics (ALTOP)
2022A7L229 - CUP J53D23003660006**

Prof. Luca Moci - 9 ottobre 2023

PREMESSA METODOLOGICA

Il presente progetto non si propone di tracciare una rotaia che l’assegnista debba seguire, ma piuttosto di indicare una porzione di mare in cui possa navigare. Questo sia per garantire la dovuta libertà di ricerca, sia per rivolgersi ad una platea di candidati quanto più vasta e varia possibile. Basti pensare che, per l’assegno “Combinatoria algebrica e topologica”, cofinanziato dal Dipartimento un anno fa, vi sono state 21 domande, provenienti da 12 nazioni distribuite su quattro continenti; per il presente assegno ci aspettiamo un interesse ancor più ampio. D’altronde, il mare di problemi di ricerca cui alludiamo è sufficientemente ampio e ricco di tesori perché due o più navi (o, fuor, di metafora, assegnisti) possano solcarlo senza ripercorre le medesime rotte, ma anzi esplorandolo in direzioni diverse, ed incontrandosi solo in qualche porto per condividere le mappe delle proprie scoperte.

LO STATO DELL’ARTE

Negli ultimi due decenni, la combinatoria ha conosciuto uno straordinario sviluppo, interagendo in modo assai fecondo con discipline quali la teoria delle rappresentazioni, la topologia algebrica, l’algebra commutativa, la geometria algebrica, la geometria discreta e poliedrale. L’emergere di tali connessioni ha portato a scoperte di grande impatto; volendo semplificarle e al tempo stesso vederle sotto una prospettiva unitaria, possiamo dire che molte di queste scoperte riguardano alcune famiglie di polinomi. Per citare tre esempi paradigmatici:

1. la congettura Rota-Heron-Welsh (1970) di log-concavità dei coefficienti dei polinomi caratteristici dei matroidi, completamente risolta in [AHK] (2018), una linea di ricerca che ha portato alla medaglia Fields per June Huh nel 2022;
2. la congettura di Kazhdan-Lusztig (1979) di positività dei polinomi a loro intitolati, completamente risolta in [EW] (2014);
3. la congettura di Macdonald (1988) di positività dei q,t -coefficienti di Kostka, dimostrata per la prima volta in [Hai1] (2001).

Ognuna di queste scoperte ha aperto nuovi orizzonti e nuovi problemi di ricerca sia nel campo della combinatoria, sia in quelli dell’algebra e della geometria.

IL GRUPPO DI RICERCA

Insieme a Michele D’Adderio (Università di Pisa) e Martina Lanini (Università di Roma 2 “Tor Vergata”), Luca Moci ha dato vita ad un gruppo di ricerca che sta perseguendo nuovi risultati in ciascuna delle linee di ricerca suddette: tale gruppo ha ottenuto un importante finanziamento nell’ambito del progetto al PRIN2022_MOCI dal titolo ALgebraic and TOPological combinatorics (ALTOP) 2022A7L229 - CUP J53D23003660006. Nel nostro Dipartimento, oltre a Luca Moci, collaborano a tale attività di ricerca Jacopo Gandini, Roberto Pagaria e

Giovanni Paolini, oltre a quattro dottorandi e ad un assegnista, Alejandro Vargas, che prenderà servizio tra un mese. Il vincitore del presente assegno di ricerca potrà inserirsi in questo gruppo di ricerca trasversale, lavorando sulle direzioni di ricerca più vicine ai propri interessi ed alle proprie competenze.

LE LINEE DI RICERCA

Illustriamo ora più nel dettaglio gli obiettivi di ciascuna di queste tre linee di ricerca, tratte dal PRIN2022_MOCI dal titolo ALgebraic and TOPological combinatorics (ALTOP) 2022A7L229 - CUP J53D23003660006.

1. La prima riguarda la topologia algebrica degli arrangiamenti di iperpiani e di sottospazi, e le sue controparti combinatorie quali i matroidi e polimatroidi. Ci proponiamo di studiare fino a che punto i metodi del lavoro pionieristico [AHK] possano essere estesi al caso dei polimatroidi, seguendo una linea di ricerca iniziata in [MP] e [PP]. In particolare, possiamo provare affermazioni di log-concavità per determinate classi di polimatroidi? Possiamo definire dei polinomi di Kazhdan-Lusztig per i polimatroidi e dar loro una descrizione sia combinatoria che geometrica? All'interno del nostro Dipartimento, l'assegnista potrà collaborare su questi temi con Luca Migliorini, Luca Moci, Alejandro Vargas, Lorenzo Vecchi, Giovanni Paolini e Roberto Pagaria.

2. La seconda linea di ricerca riguarda la teoria delle rappresentazioni delle algebre di Lie e le sue controparti combinatorie e topologiche, quali i polinomi di Kazhdan-Lusztig dei gruppi di Coxeter ed i polinomi di Kazhdan-Lusztig-Vogan; dunque, ad esempio, gli special matching [BCM] e la coomologia di intersezione locale delle varietà di Schubert [KL]. L'obiettivo sarà quello di fare progressi sulla congettura di invarianza combinatoria: possiamo provare combinatorialmente la nuova rivoluzionaria formula apparsa in [D+], che è stata dimostrata con tecniche di intelligenza artificiale? Si può fare un'analoga affermazione per i polinomi di Kazhdan-Lusztig-Vogan, che stanno alle varietà simmetriche come i polinomi di Kazhdan-Lusztig stanno alle varietà di Schubert? Possiamo mettere in relazione polinomi di Kazhdan-Lusztig-Vogan con le singularità di varietà quiver simmetriche? All'interno del nostro Dipartimento, l'assegnista potrà collaborare su questi temi con Riccardo Biagioli, Fabrizio Caselli e Jacopo Gandini per la parte di teoria di Lie, e con Giovanni Paolini sui punti di contatto con l'intelligenza artificiale. Molteplici anche le possibilità di interazione con matematici di altri Dipartimenti che hanno stabili rapporti di collaborazione con il nostro, quali Martina Lanini e Mario Marietti, membri dello stesso progetto PRIN.

3. La terza parte del progetto riguarda la teoria delle rappresentazioni del gruppo simmetrico e le sue controparti combinatorie e topologiche, quali le funzioni simmetriche, come i cammini di Dyck etichettati (che appaiono nelle congetture shuffle e Delta, dimostrate rispettivamente in [CM1] e [DM2]), le fibre di Springer affini (legate ai coinvarianti diagonali), nonché le colorazioni di grafi (che si sono alla base della funzione simmetrica di Stanley [St2] e della sua categorificazione [SY]). Possiamo fare progressi sulla congettura valley Delta e su una congettura ad essa collegata (apparsa in [HS]) sulla serie di Hilbert dei super coinvarianti diagonali? Possiamo trovare una categorificazione per la funzione simmetrica di Tutte introdotta in [St3], e per suoi analoghi aritmetici ispirati agli invarianti studiati in [DM1]? All'interno del nostro Dipartimento, l'assegnista potrà collaborare su questi temi con Jacopo Gandini e Luca Moci; molteplici anche le possibilità di interazione con matematici di altri Dipartimenti che hanno stabili rapporti di collaborazione con il nostro, quali Michele D'Adderio e Salvatore Stella, membri dello stesso progetto PRIN.

QUALCHE RIFERIMENTO BIBLIOGRAFICO

[AHK] Adiprasito, K.; Huh, J.; Katz, E.; Ann. of Math. (2) 188 (2018), no. 2, 381–452.

[BCM] Brenti, F.; Caselli, F.; Marietti, M.; Adv. Math., 202 (2006), 555-601.

- [CM1] Carlsson, E.; Mellit, A.; J. Amer. Math. Soc. 31 (2018), no. 3, 661–697.
- [DM1] D'Adderio M., Moci L, Adv. Math. (2013), 232, pp. 335 - 367.
- [DM2] D'Adderio, M.; Mellit, A.; Adv. Math. 402 (2022), 108342, 17 pp.
- [D+] Davies, A.; Veličković, P.; Buesing, L; et al.; Nature 600 (2021), 70–74
- [EW] Elias B; Williamson, G; Ann. of Math. 180 (2014), no. 3, 1089–1136.
- [Hai1] Haiman, M.; J. Amer. Math. Soc. 14 (2001), no. 4, 941–1006.
- [HS] Haglund, J.; Sergel, E.; Ann. Comb. 25 (2021), no. 1, 1–31
- [KL] Kazhdan, D.; Lusztig, G.; Geometry of the Laplace operator (Univ. Hawaii, 1979), Proc. Sympos. Pure Math., XXXVI, pages 185–203. AMS, 1980.
- [MP] Moci L.; Pagaria R., J. London Math. Soc.(2) 2022;1–31.
- [PP] Pagaria, R.; Pezzoli, G., Hodge Theory for Polymatroids, International Mathematics Research Notices, 2023, <https://doi.org/10.1093/imrn/rnad001>.
- [SY] Szazdanovic R., Yip M., J. Combin. Theory Ser. A, 154 (2018), 218-24
- [St2] Stanley R, Adv. Math. 111(1):166–194, 1995. [St3] Stanley R, Discrete Math., 193(1-3):267–286, 1998.

UN PIANO DI ATTIVITA'

La vincitrice o il vincitore del bando lavorerà, a propria scelta, su alcuni dei problemi illustrati nel presente progetto, in collaborazione con i docenti e ricercatori sopra menzionati. Potrà inoltre perseguire in autonomia altre linee di ricerca, sempre nell'ambito delle tematiche del progetto PRIN2022_MOCI dal titolo Algebraic and TOPological combinatorics (ALTOP) 2022A7L229 - CUP J53D23003660006. Riceverà dal proprio tutor (Luca Moci) il supporto organizzativo, economico e scientifico necessario per l'espletamento delle proprie attività di ricerca. Verrà incluso/a tra i partecipanti del progetto PRIN2022_MOCI dal titolo Algebraic and TOPological combinatorics (ALTOP) 2022A7L229 - CUP J53D23003660006 Parteciperà regolarmente al Seminario di Algebra e Geometria, ai Colloqui e, più in generale, alla vita scientifica del Dipartimento. Se lo desidera potrà contribuire all'attività didattica del nostro dipartimento, proponendosi come tutor di corsi della laurea triennale oppure come co-docente di un corso di dottorato. L'attività di ricerca dell'assegnista sarà finalizzata alla produzione di risultati matematici originali e di rilievo, da pubblicare su riviste di livello buono o ottimo.

COMMISSIONE

La commissione di concorso sarà composta da Luca Moci, Jacopo Gandini e Roberto Pagaria (titolari), Nicoletta Cantarini, Fabrizio Caselli e Giovanni Paolini (supplenti).

REQUISITI DI ACCESSO E IMPORTO DELL'ASSEGNO

Requisiti: dottorato in Matematica o materie affini, conseguito in Italia o all'Estero, ovvero laurea magistrale e superamento del terzo anno di dottorato. Ci pare importante che l'importo del presente assegno sia di 32000 euro come richiesto, o comunque ben al di sopra dell'importo minimo, per poter risultare attrattivo anche per i più promettenti tra i giovani matematici italiani e stranieri.